

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2024-2025

Prova scritta in aula del 09.07.2025

Parte II - Testo 1

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:..... e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, la reazione dell'appoggio in D, V_D .

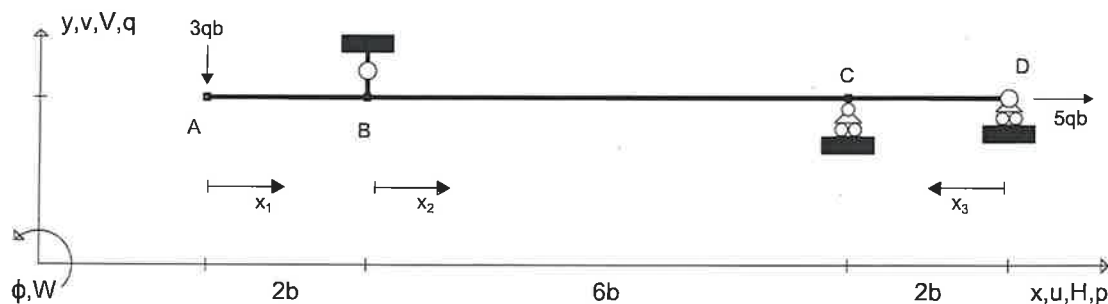
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la rotazione del punto D, φ_D .

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 2 09.07.25*001



EQUAZIONE DI CONGENITA: $V_D(x, q) = 0$

Esercizio n. 2 (7 punti)

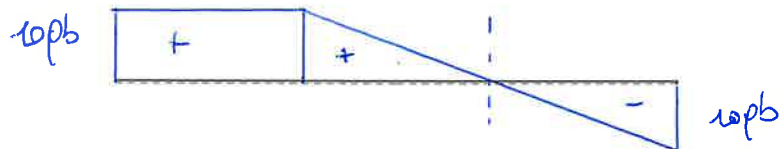
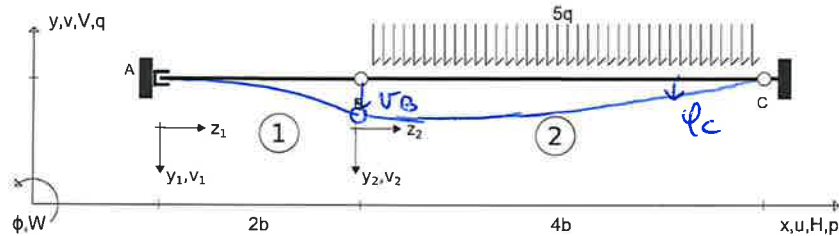
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A, B e C.

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

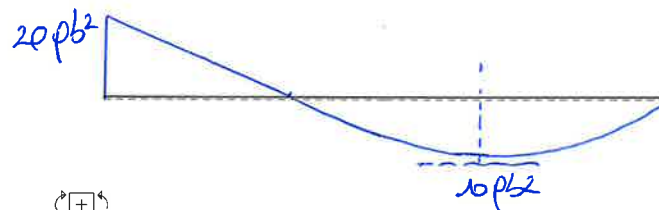
1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto C, φ_C ;
4. Lo spostamento verticale del punto B, v_B .

Universita' di Cagliari

SdC_SdA_2 09.07.25*001



$\uparrow (+) \downarrow$



$\uparrow (+) \downarrow$

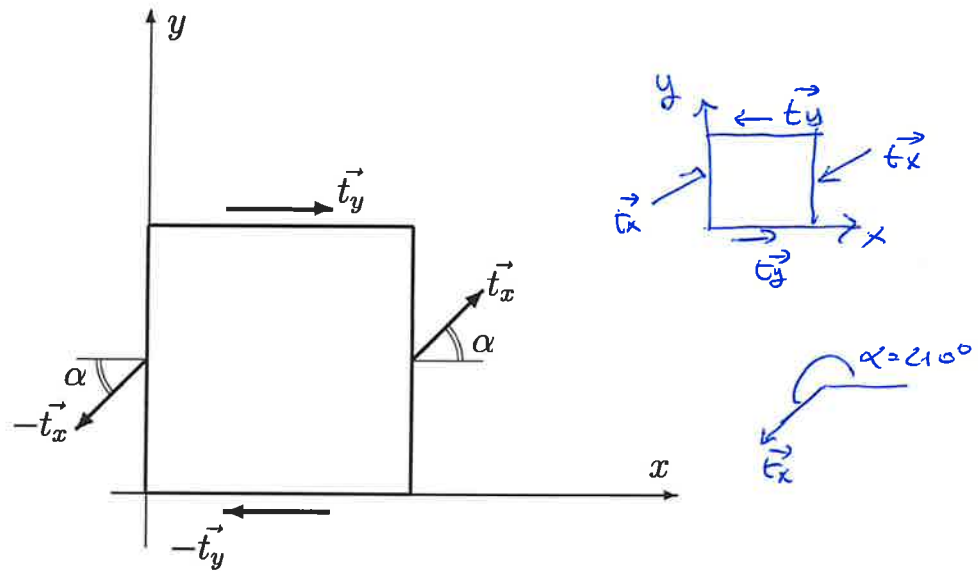
$$\begin{aligned}
 V_A (\uparrow) &= 10pb; & M_A (\curvearrowright) &= 20pb^2; & H_C (\rightarrow) &= 0; & V_C (\uparrow) &= 10pb; \\
 N_{AB} &= //; & T_{AB} &= 10qb; & M_{AB} &= -20pb^2 + 10pbz_1; \\
 N_{BC} &= //; & T_{BC} &= 10pb - 5qz_2; & M_{BC} &= 10pbz_2 - \frac{5}{2}qz_2^2; \\
 \text{c.c in A} &= v_1(z_1=0)=0; & v_1'(z_1=0) &= 0; & \text{c.c in B} &= v_1(z_1=2b) = v_2(z_2=0); \\
 & & \text{c.c in C} &= v_2(z_2=4b) = 0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{EJ}(-10qb^2z_1^2 - \frac{5}{3}qbz_1^3); & v_1'(z_1) &= \frac{1}{EJ}(20pb^2z_1 - 5pbz_1^2); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{EJ}(-\frac{5}{3}qbz_2^3 + \frac{5}{2}qbz_2^2 + \frac{20}{3}pb^2z_2 + \frac{80}{3}pb^3); & v_2'(z_2) &= \frac{1}{EJ}(-5pbz_2^2 + 5qbz_2 + \frac{20}{3}pb^2); \\
 v_B &= \frac{80pb^4}{3EJ} (\downarrow); & \varphi_C &= -\frac{20pb^3}{EJ} (\downarrow);
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) \vec{t}_x e \vec{t}_y rispettivamente; di questi \vec{t}_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = 210^\circ$ (sicché: $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$; $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$) e ha modulo di valore $|\vec{t}_x| = 20$ MPa. L'altro vettore sforzo, \vec{t}_y , è invece *orizzontale* (ma di verso non specificato!), come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} .

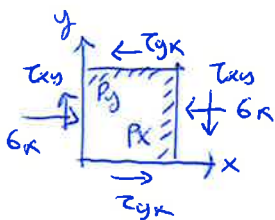
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$\sigma_x = -17,320$ (MPa); $\sigma_y = 0,000$ (MPa); $\tau_{xy} = -10,000$ (MPa);

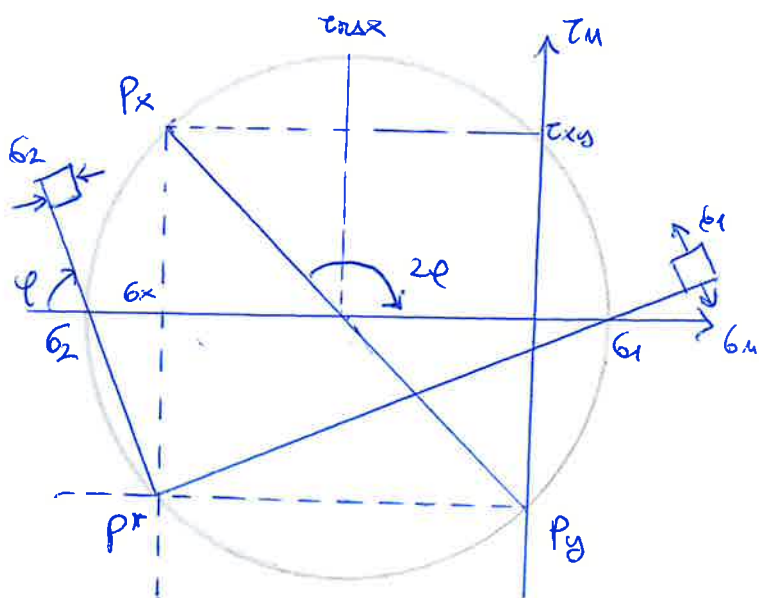
$\sigma_1 = 4,568$ (MPa); $\sigma_2 = -21,883$ (MPa); $\tau_{\max} = 13,228$ (MPa);

cerchio di Mohr:

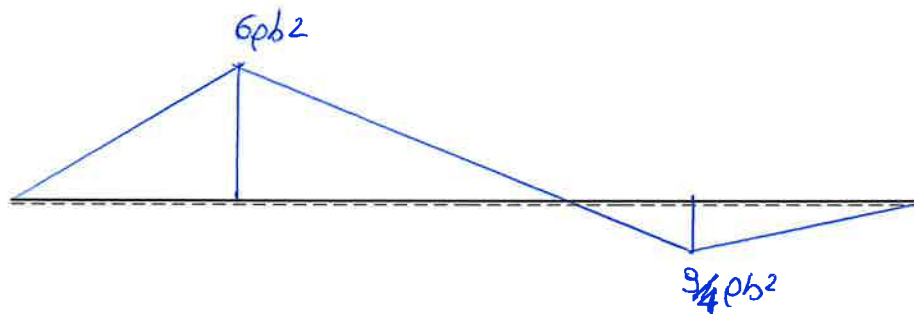
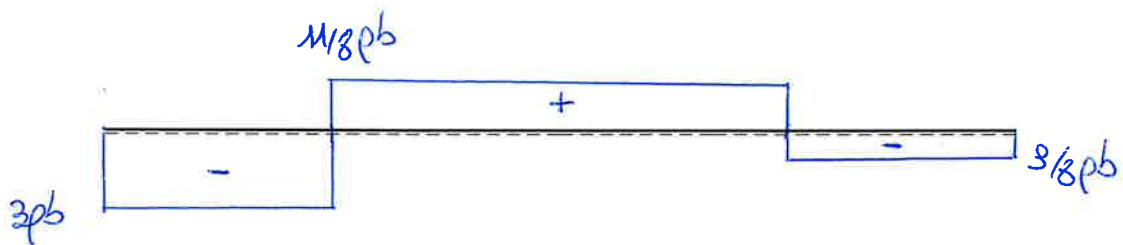
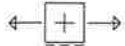
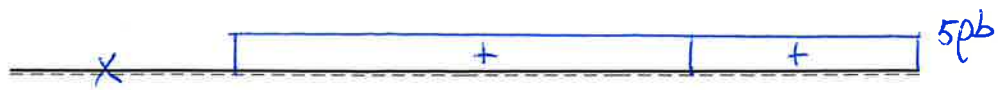


$P_x = (-17,320; 10,000)$

$P_y = (0,000; -10,000)$



$\varphi = -65,45$ ($^\circ$);



$H_B(\Rightarrow) = -5qb$	$V_B(\uparrow) = \frac{35}{8}pb$	$V_C(\uparrow) = -\frac{5}{2}pb$	$V_D(\uparrow) = \frac{3}{8}pb$
$N_{AB} = //$	$T_{AB} = -3pb$	$M_{AB} = -3pbx_1$	
$N_{BC} = 5pb$	$T_{BC} = \frac{11}{8}pb$	$M_{BC} = -6pb^2 + \frac{11}{8}pbx_2$	
$N_{DC} = 5pb$	$T_{DC} = -\frac{3}{8}pb$	$M_{DC} = \frac{3}{8}pbx_3$	
$\varphi_D = \frac{3pb^3}{4EI}$	(↓)		

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2024-2025

Prova scritta in aula del 09.07.2025

Parte II - Testo 2

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:..... e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, la reazione dell'appoggio in D, V_D .

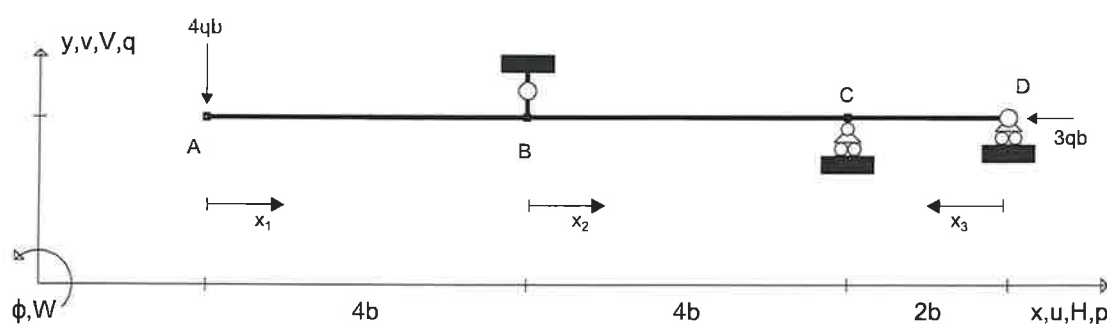
Dopo avere determinato l'iperstatica tenendo conto solo della deformabilità flessionale, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la rotazione del punto D, ϕ_D .

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 2 09.07.25*002



EQUAZIONE DI CONSISTENZA: $v_D(x, p) = 0$

Esercizio n. 2 (7 punti)

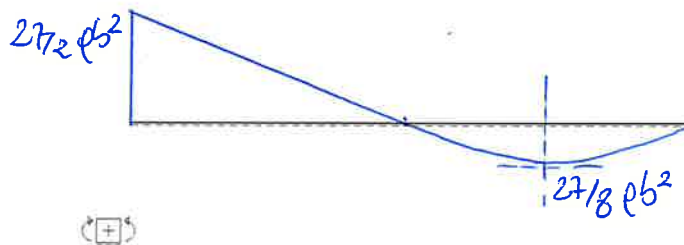
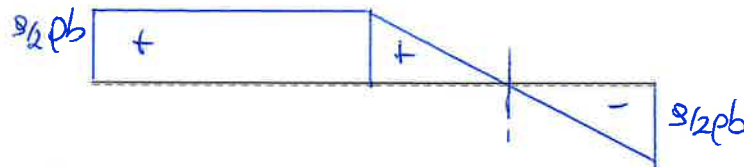
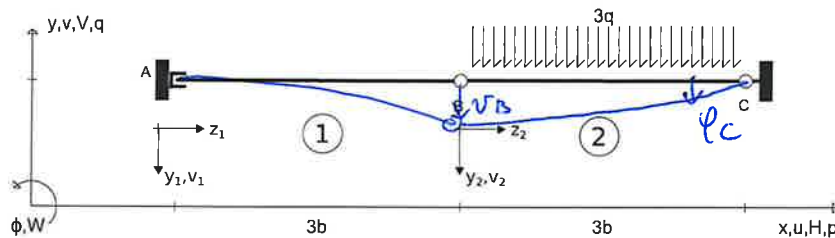
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti *A*, *B* e *C*.

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto *C*, φ_C ;
4. Lo spostamento verticale del punto *B*, v_B .

Università di Cagliari

SdC_SdA_2 09.07.25*002



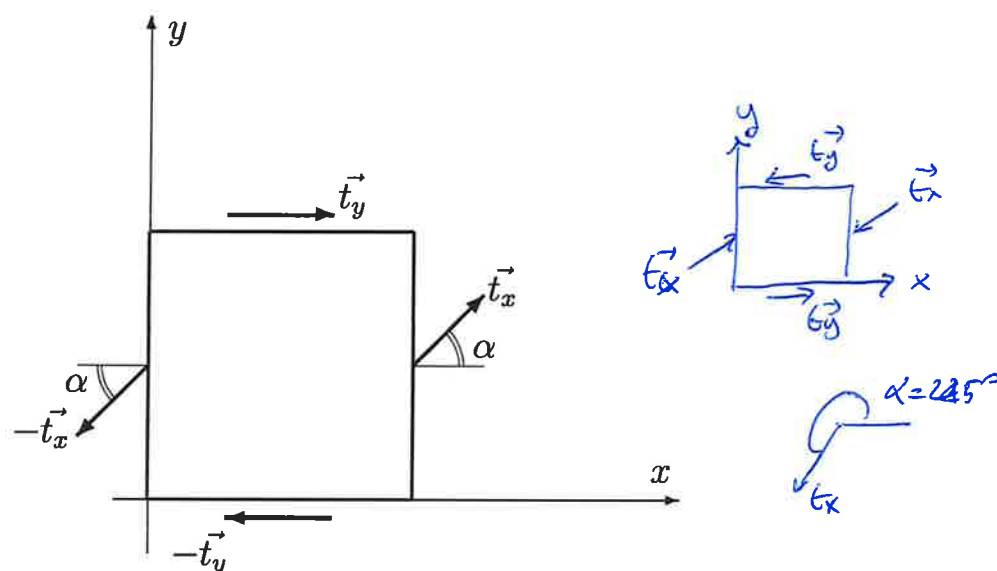
$$\begin{aligned}
 V_A (\uparrow) &= \frac{9}{2} pb; & M_A (\curvearrowright) &= \frac{27}{2} pb^2; & H_C (\Rightarrow) &= 0; & V_C (\uparrow) &= \frac{9}{2} pb; \\
 N_{AB} &= //; & T_{AB} &= \frac{9}{2} pb; & M_{AB} &= -\frac{27}{2} pb^2 + \frac{9}{2} qb z_1; \\
 N_{BC} &= //; & T_{BC} &= \frac{9}{2} pb - 3q z_2; & M_{BC} &= \frac{9}{2} pb z_2 - \frac{3}{2} q z_2^2; \\
 \text{c.c in A} &= v_1(z_1=0) = 0; & v_1'(z_1=0) &= 0; & \text{c.c in B} &= v_1(z_1=3b) = v_2(z_2=0); \\
 & & \text{c.c in C} &= v_2(z_2=3b) = 0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{EI} \left(\frac{27}{4} pb^2 z_1^2 - \frac{3}{4} pb z_1^3 \right); & v_1'(z_1) &= \frac{1}{EI} \left(\frac{27}{2} pb^2 z_1 - \frac{9}{4} pb z_1^2 \right); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{3}{4} pb z_2^2 + \frac{1}{8} q z_2^4 - \frac{81}{8} pb^2 z_2 + \frac{81}{2} pb^3 \right); & v_2'(z_2) &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{3}{4} pb z_2 + \frac{1}{2} q z_2^3 - \frac{81}{8} pb^2 \right); \\
 v_B &= \frac{81 pb^4}{2 EI} \quad (\downarrow); & \varphi_C &= -\frac{135 pb^3}{8 EI} \quad (\downarrow);
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) \vec{t}_x e \vec{t}_y rispettivamente; di questi \vec{t}_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = 225^\circ$ (sicché: $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$) e ha modulo di valore $|\vec{t}_x| = 20$ MPa. L'altro vettore sforzo, \vec{t}_y , è invece *orizzontale* (ma di verso non specificato!), come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} .

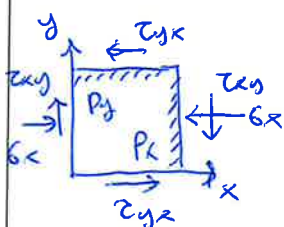
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$$\sigma_x = -14,142 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0,000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = -14,142 \text{ (MPa)};$$

$$\sigma_1 = 8,740 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -22,882 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 15,811 \text{ (MPa)};$$

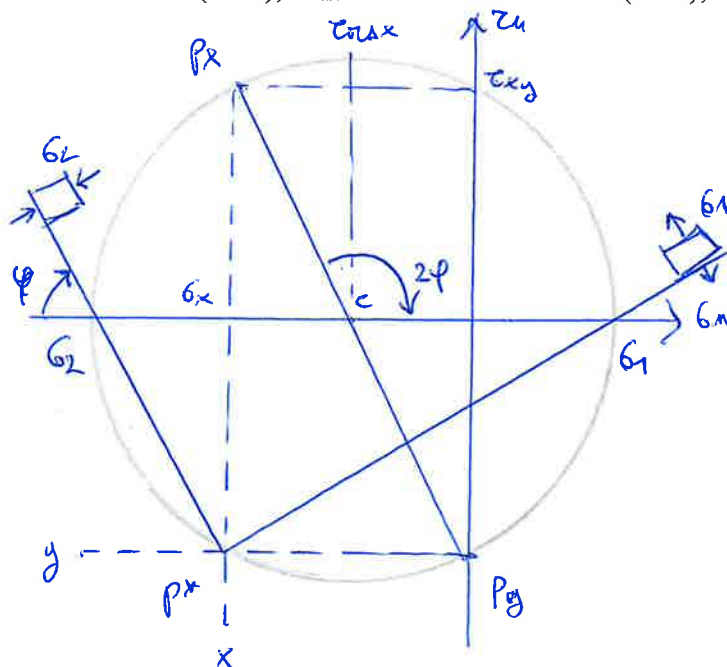
cerchio di Mohr:

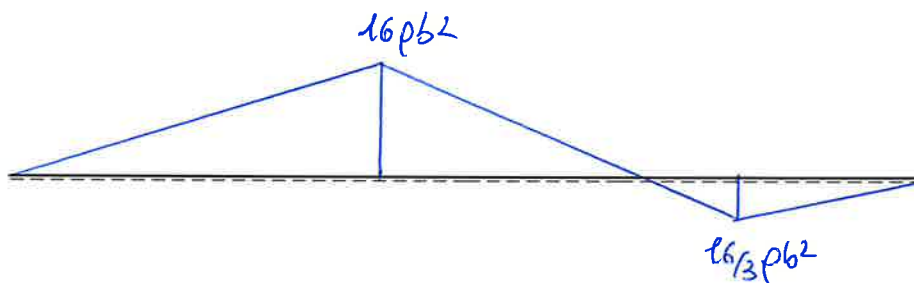
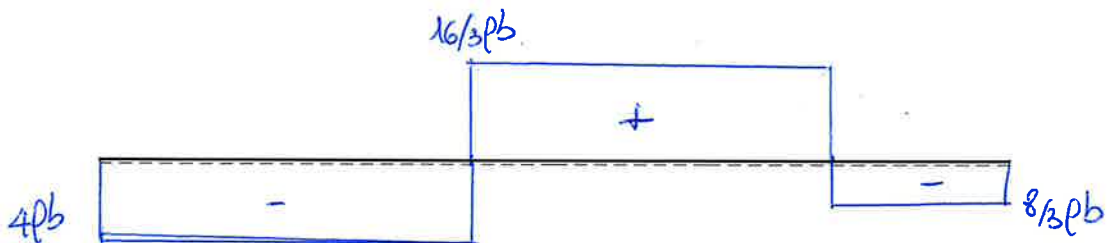
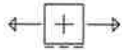
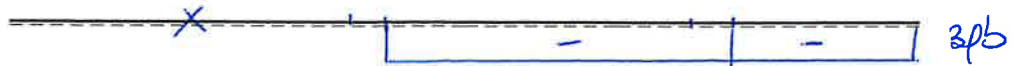


$$P_x = (-14,142; 14,142)$$

$$P_y = (0,000; -14,142)$$

$$\varphi = -58,28 \text{ (}^\circ\text{)};$$





$H_B (\Rightarrow) = 3pb$	$V_B (\uparrow) = 28/3pb$	$V_C (\uparrow) = -8pb$	$V_D (\uparrow) = 8/3pb$
$N_{AB} = //$	$T_{AB} = -4pb$	$M_{AB} = -4pb \times 1$	
$N_{BC} = -3pb$	$T_{BC} = 16/3pb$	$M_{BC} = -16pb^2 + 16/3pb \times 2$	
$N_{DC} = -3pb$	$T_{DC} = -8/3pb$	$M_{DC} = 8/3pb \times 3$	
$\varphi_D = 16pb^3/8EI$	(\downarrow)		

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2024-2025

Prova scritta in aula del 09.07.2025

Parte II - Testo 3

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:..... e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, la reazione dell'appoggio in D, V_D .

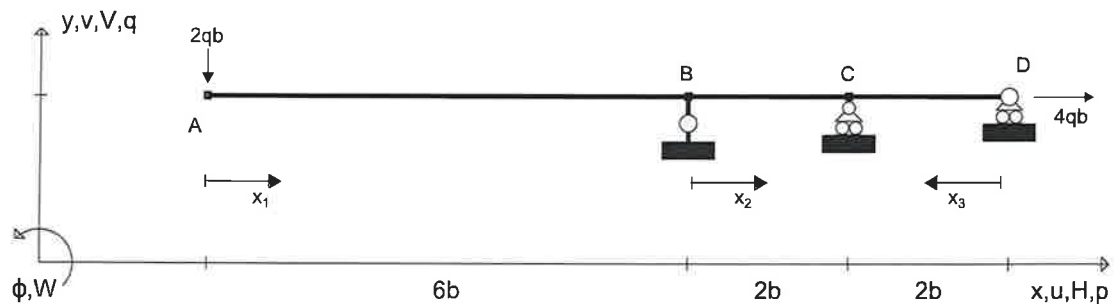
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la rotazione del punto D, φ_D .

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 2 09.07.25*003



EQUAZIONE DI INCOGNITA: $V_D(X, q) = 0$

Esercizio n. 2 (7 punti)

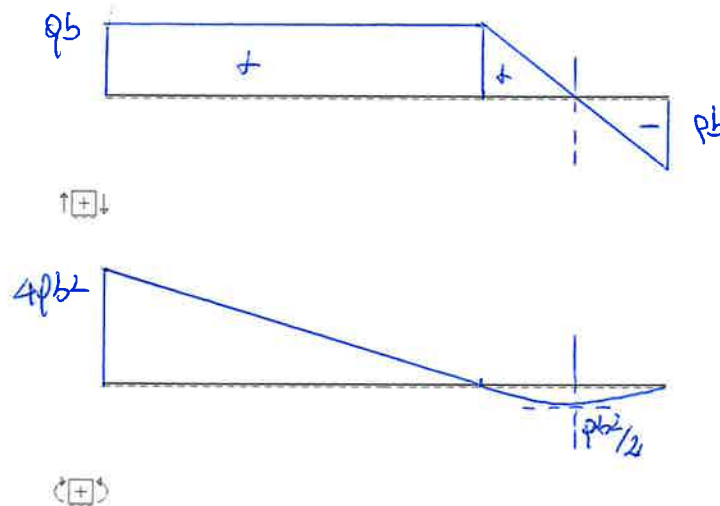
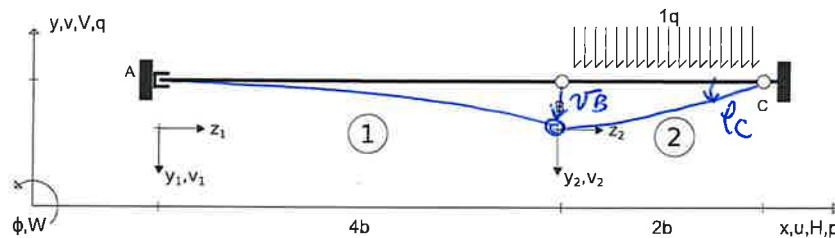
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A, B e C.

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto C, φ_C ;
4. Lo spostamento verticale del punto B, v_B .

Universita' di Cagliari

SdC_SdA_2 09.07.25*003



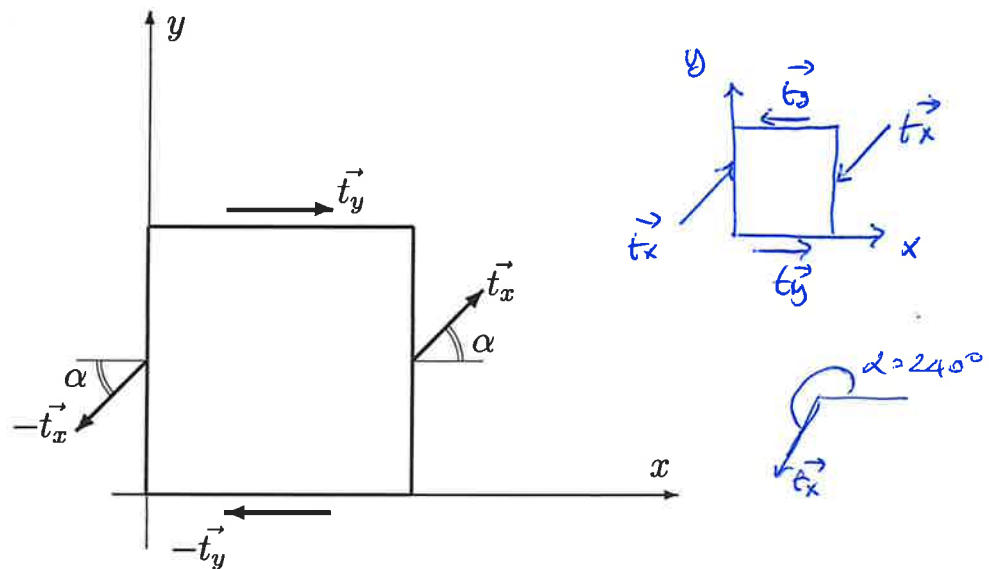
$$\begin{aligned}
 V_A (\uparrow) &= q b; & M_A (\curvearrowright) &= 4 p b^2; & H_C (\Rightarrow) &= 0; & V_C (\uparrow) &= q b; \\
 N_{AB} &= //; & T_{AB} &= q b; & M_{AB} &= 4 p b^2 - q b z_1; \\
 N_{BC} &= //; & T_{BC} &= p b - q z_2; & M_{BC} &= q b z_2^2 - \frac{1}{2} p z_2^2; \\
 \text{c.c in A} &= v_1(z_1=0)=0; & v_1'(z_1=0) &= 0; & \text{c.c in B} &= v_1(z_1=4b) = v_2(z_2=0); \\
 & & \text{c.c in C} &= v_2(z_2=2b)=0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{EI} (2 p b^2 z_1^2 - \frac{1}{6} p b z_1^3); & v_1'(z_1) &= \frac{1}{EI} (4 p b^2 z_1 - \frac{1}{2} p b z_1^2); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{EI} (-\frac{1}{6} p b z_2^3 + \frac{1}{24} p b z_2^4 - \frac{3}{3} p b^2 z_2 + \frac{64}{3} p b^4); & v_2'(z_2) &= \frac{1}{EI} (-\frac{1}{2} p b z_2^2 + \frac{1}{6} p b z_2^3 - \frac{3}{3} p b^2); \\
 v_B &= \frac{64 p b^4}{3 EI}; & \varphi_C &= -\frac{11 p b^3}{EI} (\downarrow);
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) \vec{t}_x e \vec{t}_y rispettivamente; di questi \vec{t}_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = 240^\circ$ (sicché: $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$) e ha modulo di valore $|\vec{t}_x| = 20$ MPa. L'altro vettore sforzo, \vec{t}_y , è invece *orizzontale* (ma di verso non specificato!), come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} .

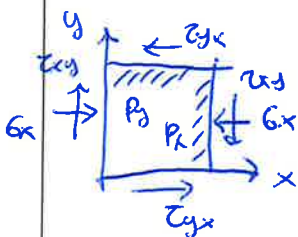
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$\sigma_x = -10,000$ (MPa); $\sigma_y = 0,000$ (MPa); $\tau_{xy} = -17,320$ (MPa);

$\sigma_1 = 13,027$ (MPa); $\sigma_2 = -23,027$ (MPa); $\tau_{\max} = 18,024$ (MPa);

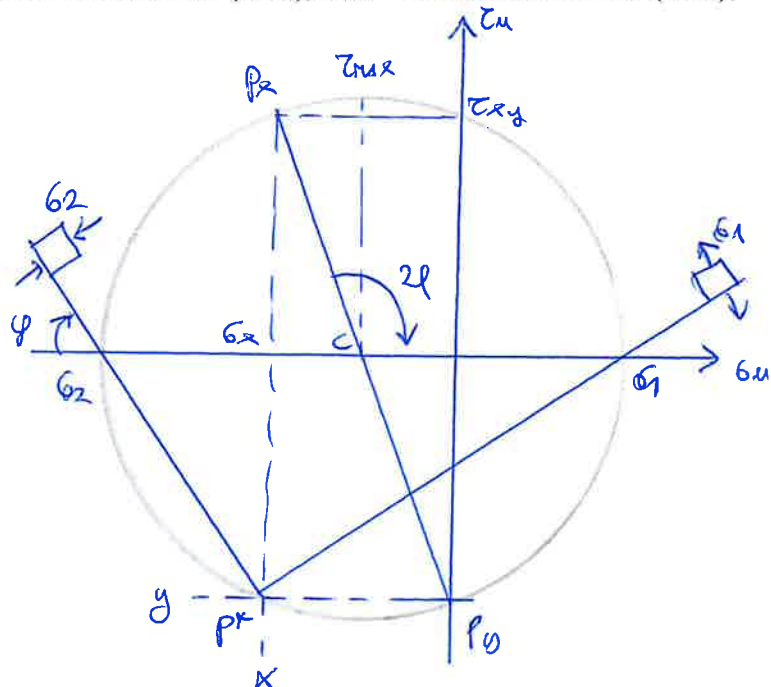
cerchio di Mohr:

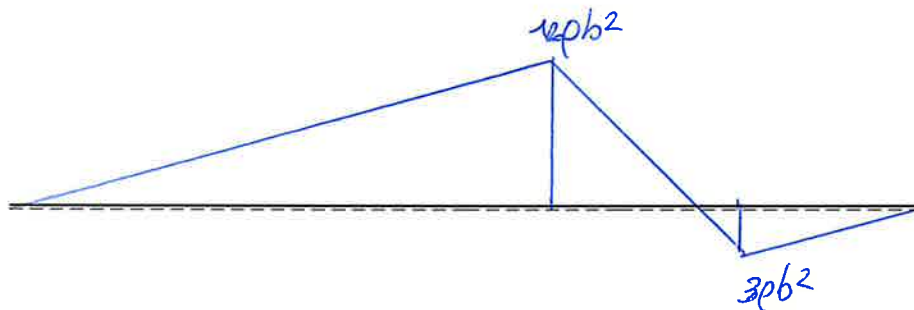
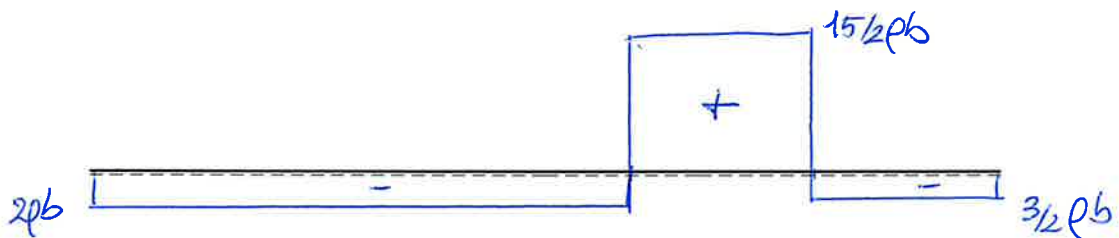
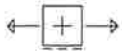
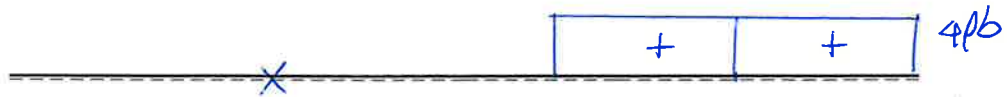


$P_x = (-10,000; 17,320)$

$P_y = (0,000; -17,320)$

$\varphi = -53,05$ (°);





$H_B(\Rightarrow) = -4pb$	$V_B(\uparrow) = 15/2 pb$	$V_C(\uparrow) = -3pb$	$V_D(\uparrow) = 3/2 pb$
$N_{AB} = //$	$T_{AB} = -2pb$	$M_{AB} = -2pbx_1$	
$N_{BC} = 4pb$	$T_{BC} = +15/2 pb$	$M_{BC} = -12pb^2 + 15/2 pbx_2$	
$N_{DC} = 4pb$	$T_{DC} = -3/2 pb$	$M_{DC} = 3/2 pbx_3$	
$\varphi_D = 9b^3/EI \quad (\downarrow)$			